Analisi Matematica 1, Ing. Gestionale 2023-2024 (787AA)
Appello 5

24-06-2024

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 5, 24-06-2024

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE A

1. Calcolare la derivata di $f(x) = \int_x^{x^2} ye^y dy$.

   Sol. $f'(x) = 2x^3e^{x^2} - xe^x$.

2. Dire, giustificandolo, se date f e g continue su $[0,1]$, la funzione composta $h(x) = f(g(x))$ ammette un minimo e/o un massimo assoluto su $[0,1]$.

   Sol. Ammette max e minimo assoluto per Weierstrass, poiché composizione di continue è continua.

3. Dire, giustificandolo, se la seguente funzione è continua su nel punto $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2)}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} & x = 0 \end{cases}$$

   Sol. Sì, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

4. Determinare le soluzioni in $[0, +\infty)$ della disuguaglianza $\sin^3(2x) \geq 1$.

   Sol. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

5. Si trovi la soluzione generale $x(t)$ di $x''(t) - 7x'(t) + 12x(t) = t$.

   Sol. $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{4t} + \frac{7}{144} + \frac{t}{12}$.

6. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{1+e^{2t}}{1+e^t} dt$.

   Sol. $e^t + t - 2\log(e^t + 1) + c$.

7. Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo I che ammette minimo locale in $x = 1$ ma non soddisfa il Teorema di Fermat.

   Sol. $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x-1|$ (non derivabile in $x = 1$...). Chiaramente, anche altri esempi vanno bene purché siano corretti!

8. Calcolare il limite $\ell = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(3x)}{\log(6x)}$.

   Sol. $\ell = 1$.

9. Determinare il valore del parametro α tale che la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha + \sin(-\frac{x}{7}) - 1$ abbia sviluppo di Taylor con primo termine non nullo quello di grado 2.

   Sol. $\alpha = \frac{1}{7}$.

10. Disegnare il grafico in $(-\pi/2, \pi/2)$ di $f(x) = |\tan(x)|$.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 5, 24-06-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE B

1. Dire, giustificandolo, se la seguente funzione è continua su nel punto $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x^3)}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

2. Determinare le soluzioni in $[0, +\infty)$ della disuguaglianza $\sin^3(4x) \geq 1$.

   Sol. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Si trovi la soluzione generale $x(t)$ di $x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = t$.

   Sol. $x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} - \frac{7}{144} + \frac{t}{12}$.

4. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{2 + e^{2t}}{e^t - 1} dt$.

   Sol. $e^t - 2t + 3 \log |e^t - 1| + c$.

5. Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo I che ammette minimo locale in $x = 3$ ma non soddisfa il Teorema di Fermat.

   Sol. $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x - 3|$ (non derivabile in $x = 3$...). Chiaramente, anche altri esempi vanno bene purché siano corretti!

6. Calcolare il limite $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(8x)}{\log(4x)}$.

   Sol. $\ell = 1$.

7. Determinare il valore del parametro α tale che la funzione $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 + \sin(\frac{x}{2})$ abbia sviluppo di Taylor con primo termine non nullo quello di grado 2.

   Sol. $\alpha = -\frac{1}{2}$.

8. Calcolare la derivata di $f(x) = \displaystyle\int_x^{-x^2} ye^y dy$.

   Sol. $f'(x) = 2x^3 e^{-x^2} - xe^x$.

9. Dire, giustificandolo, se date f e g continue su $[0, 1]$, la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ ammette un minimo e/o un massimo assoluto su $[0, 1]$.

   Sol. Ammette max e minimo assoluto per Weierstrass, poiché differenza di continue è continua.

10. Disegnare il grafico in $(-\pi/2, \pi/2)$ di $f(x) = |\tan(-x)|$.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 5, 24-06-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE C

1. Si trovi la soluzione generale $x(t)$ di $x''(t) - 7x'(t) + 12x(t) = -t$.

   Sol. $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} - \frac{7}{144} - \frac{t}{12}$.

2. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{-1 + e^{2t}}{2 + e^t} dt$.

   Sol. $e^t - \frac{t}{2} - \frac{3}{2}\log(e^t + 2) + c$.

3. Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo I che ammette minimo locale in $x = -1$ ma non soddisfa il Teorema di Fermat.

   Sol. $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x + 1|$ (non derivabile in $x = -1$...). Chiaramente, anche altri esempi vanno bene purché siano corretti!

4. Calcolare il limite $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(2x)}{\log(7x)}$.

   Sol. $\ell = 1$.

5. Determinare il valore del parametro α tale che la funzione $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 + \log(1 - \frac{x}{5})$ abbia sviluppo di Taylor con primo termine non nullo quello di grado 2.

   Sol. $\alpha = \frac{1}{5}$.

6. Calcolare la derivata di $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x^2} ye^y dy$.

   Sol. $f'(x) = 2x^3 e^{x^2} - xe^{-x}$.

7. Dire, giustificandolo, se date f e g continue su $[0, 1]$, la funzione $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ammette un minimo e/o un massimo assoluto su $[0, 1]$.

   Sol. Ammette max e minimo assoluto per Weierstrass, poiché prodotto di continue è continua.

8. Dire, giustificandolo, se la seguente funzione è continua su nel punto $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(-x^2)}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} & x = 0 \end{cases}$$

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = -1 \neq 1 = f(0)$.

9. Determinare le soluzioni in $[0, +\infty)$ della disuguaglianza $\sin^3(2x) \leq -1$.

   Sol. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

10. Disegnare il grafico in $(-\pi/2, \pi/2)$ di $f(x) = -|\tan(x)|$.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 5, 24-06-2024

NOME E COGNOME: ____________________________________ **MATRICOLA:** ____________________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE D

1. Determinare il valore del parametro α tale che la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 + \log(1+\frac{x}{3})$ abbia sviluppo di Taylor con primo termine non nullo quello di grado 2.

   Sol. $\alpha = -\frac{1}{3}$.

2. Calcolare la derivata di $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{-x^2} ye^y dy$.

   Sol. $f'(x) = 2x^3e^{-x^2} - xe^{-x}$.

3. Dire, giustificandolo, se date f e g continue su $[0,1]$, la funzione $h(x) = f(x)+g(x)$ ammette un minimo e/o un massimo assoluto su $[0,1]$.

   Sol. Ammette max e minimo assoluto per Weierstrass, poiché somma di continue è continua.

4. Dire, giustificandolo, se la seguente funzione è continua su nel punto $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\tan(-x)}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} & x = 0 \end{cases}$$

   Sol. Sì, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

5. Determinare le soluzioni in $[0,+\infty)$ della disuguaglianza $\sin^3(4x) \leq -1$.

   Sol. $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

6. Si trovi la soluzione generale $x(t)$ di $x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = -t$.

   Sol. $x(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-4t} + \frac{7}{144} - \frac{t}{12}$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{2+e^{2t}}{3+e^t}dt$.

   Sol. $e^t + \frac{2t}{3} - \frac{11}{3}\log(e^t+3) + c$.

8. Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo I che ammette minimo locale in $x = -2$ ma non soddisfa il Teorema di Fermat.

   Sol. $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x+2|$ (non derivabile in $x = -2$...). Chiaramente, anche altri esempi vanno bene purché siano corretti!

9. Calcolare il limite $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(4x)}{\log(5x)}$.

   Sol. $\ell = 1$.

10. Disegnare il grafico in $(-\pi/2, \pi/2)$ di $f(x) = \tan(|x|)$.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 5, 24-06-2024

NOME E COGNOME: ______________________ MATRICOLA: ______________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE I

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Si dica se la funzione è invertibile su $(\log(-1+\sqrt{2}), \infty)$ e in tal caso calcolarne l'inversa.
   Calcolare l'area del triangolo che ha come vertici $P = (\log 3, 0)$, $Q = (\log 3, f(\log 3))$, e il punto R di intersezione con l'asse delle ascisse della retta tangente a $f(x)$ nel punto Q.

2. Si considerino i cilindri di raggio di base $r > 0$ e altezza $h > 0$ tale che la misura della superficie laterale $S > 0$ sia fissata. Quale è il cilindro di volume massimo realizzabile?
   (Ricordiamo che $V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.)

Sol. 1. $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, non è né pari dispari né pari, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a 1 se $x \to -\infty$ (asintoto orizzontale). Funzione illimitata superiormente, quindi $\sup f = +\infty$. La funzione passa per $(0, 1)$. La derivata è

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} + 2e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}.$$

Con la sostituzione $e^x = t$ si ha che $f'(x) = 0$ se e solo se

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t = -1 \pm \sqrt{2},$$

ovvero $x = \log(-1 + \sqrt{2})$ (si osservi che $x = \log(-1 - \sqrt{2})$ non è definito). Quest'ultimo è un punto di minimo (assoluto) e quindi si ha che $Im(f) = (f(\log(-1+\sqrt{2})), \infty) = (2\sqrt{2}-2, \infty)$. La funzione è decrescente su $(-\infty, \log(-1+\sqrt{2}))$ e crescente altrimenti. La funzione è monotona su $(\log(-1 + \sqrt{2}), \infty)$ quindi invertibile, con inversa $x = g(y)$ che si ottiene come segue.

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} = \frac{t^2 + 1}{t + 1},$$

con il cambio di variabile come sopra. Quindi, posto $t = e^x$, otteniamo $t^2 - yt + 1 - y = 0$ da cui si ricava $t = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4y-4}}{2}$. Ricordando la definizione di t si ha che $x = \log(\frac{y \pm \sqrt{y^2+4y-4}}{2}) = g(y)$. La scelta corretta è ovviamente $g(y) = \log(\frac{y+\sqrt{y^2+4y-4}}{2})$. Per l'area bisogna quindi scrivere l'equazione della retta tangente a f nel punto $Q = (\log 3, 5/2)$. Il suo coefficiente angolare è dato da $f'(\log 3) = 21/8$, quindi l'equazione della retta è $y = \frac{21}{8}(x - \log 3) + \frac{5}{2}$. Ne consegue che $R = (\frac{20}{21} + \log 3, 0)$. Quindi l'area cercata è $A = \frac{1}{2}\frac{20}{21}\frac{5}{2} = \frac{25}{21}$.

Sol. 2. Il volume di un cilindro con raggio di base r e altezza h è dato da $V = \pi r^2 h$, mentre la misura di superficie $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Ne consegue che $V = \frac{\pi r^2(S-2\pi^2)}{2\pi r} = \frac{r(S-2\pi r^2)}{2}$, dove V è in funzione del raggio r (S è un parametro fissato). Trattandosi di volume, imponiamo $V > 0$, che vale se e solo se $r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. Pertanto per massimizzare il volume in funzione del raggio si deriva V rispetto alla variabile r e si ottiene $V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$. $V'(r) = 0$ se e solo se $r^2 = \frac{S}{6\pi}$, ovvero $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Ne consegue che $h = \frac{S}{2\pi r} - r$, ovvero $h = 2r$, e quindi $V = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. In conclusione, il cilindro di volume massimo a superficie laterale fissata è quello che ha altezza il doppio del raggio di base.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), 5, 24-06-2024

NOME E COGNOME:		MATRICOLA:	

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE II

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Si dica se la funzione è invertibile su $(\log(-1+\sqrt{2}), \infty)$ e in tal caso calcolarne l'inversa.
   Calcolare l'area del triangolo che ha come vertici $P = (\log 2, 0)$, $Q = (\log 2, f(\log 2))$, e il punto R di intersezione con l'asse delle ascisse della retta tangente a $f(x)$ nel punto Q.

2. Si considerino i cilindri con raggio di base $r > 0$ e altezza $h > 0$ tali che la somma di queste due quantità sia fissa e pari a un valore fissato $S > 0$. Quale è il cilindro di volume massimo tra questi?
   (Ricordiamo che volume $V = \pi r^2 h$.)

Sol. 1. $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, non è né pari dispari né pari, tende a 0 per $x \to +\infty$ e a 1 se $x \to -\infty$ (asintoto orizzontale). La funzione passa per $(0, 1)$. La derivata è

$$f'(x) = \frac{-e^x(e^{2x} + 2e^x - 1)}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Con la sostituzione $e^x = t$ si ha che $f'(x) = 0$ se e solo se

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t = -1 \pm \sqrt{2},$$

ovvero $x = \log(-1+\sqrt{2})$ (si osservi che $x = \log(-1-\sqrt{2})$ non è definito). Quest'ultimo è un punto di massimo (assoluto) e quindi si ha che $Im(f) = (0, \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}]$. La funzione è crescente su $(-\infty, \log(-1+\sqrt{2}))$ e decrescente altrimenti. La funzione è monotona su $(\log(-1+\sqrt{2}), \infty)$ quindi invertibile, con inversa $x = g(y)$ che si ottiene come segue.

$$y = \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} = \frac{t+1}{t^2+1},$$

con il cambio di variabile come sopra. Quindi, posto $t = e^x$, otteniamo $yt^2 - t + y - 1 = 0$ da cui si ricava $t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y(y-1)}}{2y}$. Ricordando la definizione di t si ha che $x = \log(\frac{1 \pm \sqrt{1-4y(y-1)}}{2y}) = g(y)$. La scelta corretta è ovviamente $g(y) = \log(\frac{1+\sqrt{1-4y(y-1)}}{2y})$. Per l'area bisogna quindi scrivere l'equazione della retta tangente a f nel punto $Q = (\log 2, 3/5)$. Il suo coefficiente angolare è dato da $f'(\log 2) = -14/25$, quindi l'equazione della retta è $y = -\frac{14}{25}(x - \log 2) + \frac{3}{5}$. Ne consegue che $R = (\frac{15}{14} + \log 2, 0)$. Quindi l'area cercata è $A = \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{15}{14} = \frac{9}{28}$.

Sol. 2. Un cilindro ha volume $V = \pi r^2 h$, quindi dalla relazione $h = S - r$ (imponendo $r < S$) si ha che $V = \pi r^2(S - r)$, che è una funzione dipendente solo dal raggio r (S è un valore fissato). Per massimizzare V procediamo quindi a derivare questa funzione rispetto a r. Si ha $V'(r) = \pi r(2S - 3r)$ che è nulla se e solo se $r = \frac{2S}{3}$. Pertanto $h = \frac{S}{3}$, quindi $h = \frac{r}{2}$ che è il cilindro di altezza la metà del raggio, con volume $V = \frac{4\pi}{27}S^3$.